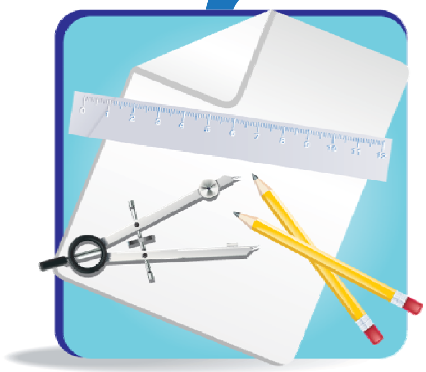
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



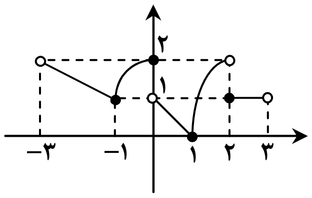
حسابان

- فصل ۴

حسابان

فصل ۴: حد و پیوستگی توابع

۱- اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل مقابل باشد، حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 1^-} f(-x)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(2x)-\lim\limits_{x\to 0^-} f(-2x)$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱-

۳) صفر

۴) ۱

۲- اگر $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3a & x\ge 1\\ 2x-a & x<1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0=1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $a=\frac{2}{3}$ ۲) $a=2$ ۳) $a=-1$ ۴) $a=1$

۳- اگر تابع $f(x)=a[-x]+(a-1)[-\frac{x}{2}]$ در نقطه‌ی $x_0=-2$ دارای حد باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) $a=0$ ۲) $a=\frac{1}{2}$ ۳) $a=1$ ۴) $a=2$

۴- حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{|9-x^2|+[\frac{x}{3}]}{x-3+[\frac{x}{3}]}$ در نقطه‌ی $x=3$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۳- ۴) ۶-

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۶- اگر به‌ازای هر x حقیقی داشته باشیم $|3f(x)-1|\le 2-2\cos x$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1-\sqrt{2x-2}}{x-3}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\sin x+\sin 3x}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x>0\\ -\sqrt{1+x^2} & x\le 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2-x^4)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

۱۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan \pi x-\cos\frac{\pi x}{2}}{x^2-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) π ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\pi-\cos^{-1}x}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

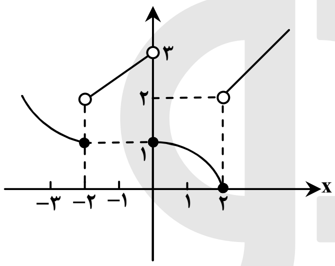
۱۳- اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{ax^2+2x+b}=2$، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۴- حد تابع $f(x)=\dfrac{1+\cos 3\pi x}{x^2-2x+1}$ وقتی $x\to 1$، کدام است؟

۱) $-4\pi^2$ ۲) $4\pi^2$ ۳) $-\frac{9\pi^2}{2}$ ۴) $\frac{9\pi^2}{2}$

۱۵- نمودار تابع $y=f(x)$ مانند شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(f(-x-2)\right)$ چقدر است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۱۶- اگر حد چپ تابع $f(x)=a[x]+[x+1]$ در نقطه‌ی $x_0=1$، ۲ واحد از حد راست آن کم‌تر باشد، a چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷- در تابع $f(x)=\begin{cases}-2 & x\in\mathbb{Z}\\ 1 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) -4 ۴) وجود ندارد.

۱۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) -1

۱۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]-\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) -9 ۲) -10 ۳) -11 ۴) -12

۲۰- تابع $y=(x-x^3)[x-1]$ در چند نقطه به‌طول صحیح دارای حد است؟

۱) هیچ نقطه ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[-\tan^2 x]+\cos 4x}{\sin^2\frac{x}{2}+[\sin^2 x]}$ کدام است؟

۱) -16 ۲) ۱۶ ۳) -32 ۴) ۳۲

۲۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6+2x-3}{x^5+x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

۲۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{2x\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $-\dfrac{1}{2}$

۲۵- حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{1}{4})^+}\dfrac{|\cot 2\pi x|}{1-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{2}$ ۲) $-\dfrac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $-\pi$

۲۶- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x\cos 3x}{\sqrt{1-x^2}-1}$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۶ ۴) ۶-

۲۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2\sqrt{x}+1)(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}-1)}{(x-1)^4}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $-\dfrac{1}{24}$ ۳) $\dfrac{-1}{36}$ ۴) $\dfrac{-1}{48}$

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)(\sin\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{\sin(x-1)})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

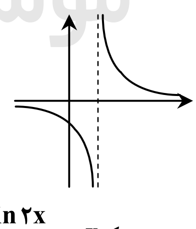
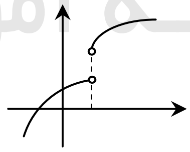
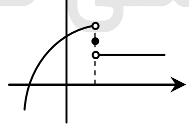
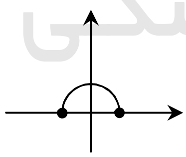
۲۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{2}-b[2x] & x\neq 2\\ -1 & x=2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0=2$ پیوسته باشد، $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

۳۰- تابع $f(x)=[\dfrac{x+2}{4}]+[\dfrac{x-2}{4}]$ در نقطه‌ی $x=2$ از نظر پیوستگی به کدام صورت است؟

۱) پیوستگی چپ و راست دارد.
۲) فقط پیوستگی راست دارد.
۳) فقط پیوستگی چپ دارد.
۴) ناپیوستگی چپ و ناپیوستگی راست دارد.

۳۱- کدام‌یک از توابع زیر ناپیوسته است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a-[-x] & x=0\\ b+[x+1] & x>0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۵ ۴) ۵-

۳۳- تابع $f(x)=[\sqrt{x}]-[-\sqrt{x}]$ در کدام نقطه پیوسته است؟

۱) $x=1$ ۲) $x=4$ ۳) $x=9$ ۴) $x=2$

۳۴- اگر تابع $f(x)=(2x^2-ax-b)[x-1]$ در بازه‌ی $[1,4)$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۲

۳۵- چه تعداد از توابع زیر ناپیوسته‌اند؟

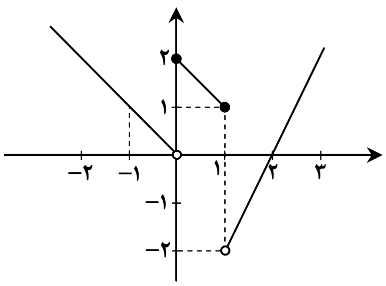
الف) $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۴}$ ب) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ ج) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ د) $f(x)=[۲x]$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶- حد عبارت $\frac{\tan ۲x}{\sqrt{۱-\cos^۳ ۲x}}$ وقتی $x \to ۰^-$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۶}}{۳}$

۳۷- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(۱-\cos x)$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۳۸- اگر $f(\frac{۲x-۱}{x-۱})=\frac{۲x^۲-۳x-۲}{x^۳-۸}$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۹}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۹}$

۳۹- به‌ازای چه مقدار از a تابع $f(x)=۲a[\frac{۲}{x}]+(a-۱)[-x]$ در نقطه‌ی $x=-۱$ دارای حد است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

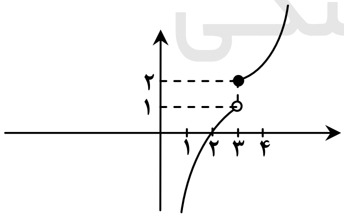
۴۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{|\sin \pi x|}{x^۲-x[x]}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\pi$ ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۴۱- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲}$ کدام است؟

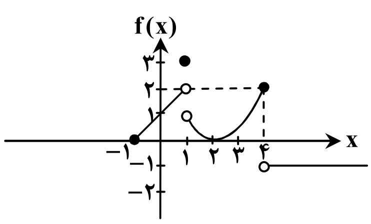
۱) ۱- ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۲- اگر شکل مقابل نمایش تابع $f(x)$ باشد و $g(x)=\begin{cases}[f(x)]-۲ & x<۳\\ -[f(x)] & x>۳\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) ۲-
۴) وجود ندارد.

۴۳- نمودار تابع f در شکل مقابل نشان داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(\frac{۱}{۲x-۷})$ کدام است؟



۱) ۱-
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۲

۴۴- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{۱+۲x}-۱}{\sin ۲x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۴۵- اگر $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(a-1)(x+3)}{1-\sqrt{5x+16}} = 2$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۱-

۴۶- اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} [2x]+3a & x<0 \\ 2-x & x=0 \\ \dfrac{\pi(b+x)}{\tan^{-1}(x+1)} & x>0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقادیر a و b کدام است؟

۱) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

۴۷- مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=(x^2-ax+3)[2x]$ در $x=1$ پیوسته باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۸- مقدار $f(1)$ را چگونه تعریف کنیم تا تابع $f(x)=(x^3-1)\cot(x^2-1)$ $(x\neq 1)$ در $x=1$ پیوسته باشد؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۴۹- تابع $f(x)=[2x-3]$ در بازه‌ی $[-1, 2]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ‌های تشریحی فصل ۴

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$x\to 1^- \Rightarrow x<1 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow -x\to(-1)^+ \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(-x)=f\left((-1)^+\right)=1$$

$$x\to 1^- \Rightarrow x<1 \Rightarrow 2x<2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(2x)=f(2^-)=2$$

$$x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow -2x>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(-2x)=f(0^+)=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(-x)+\lim_{x\to 1^-} f(2x)-\lim_{x\to 0^-} f(-2x)=1+2-1=2$$

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

شرط وجود حد، برابری حدهای چپ و راست است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x-a=2-a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x^2+3a)=-2+3a\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 2-a=-2+3a \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

شرط وجود حد، برابری حدهای چپ و راست در نقطه‌ی $x=-2$ است. داریم:

$$x\to(-2)^- \Rightarrow x<-2 \Rightarrow \begin{cases}-x>2 \Rightarrow -x\to 2^+\\ -\dfrac{x}{2}>1 \Rightarrow -\dfrac{x}{2}\to 1^+\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=a[2^+]+(a-1)[1^+]=2a+a-1=3a-1$$

$$x\to(-2)^+ \Rightarrow x>-2 \Rightarrow \begin{cases}-x<2 \Rightarrow -x\to 2^-\\ -\dfrac{x}{2}<1 \Rightarrow -\dfrac{x}{2}\to 1^-\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=a[2^-]+(a-1)[1^-]=a+0=a$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x) \Rightarrow 3a-1=a \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{|9-x^2|+[\frac{x}{3}]}{x-3+[\frac{x}{3}]}=\lim_{x\to 3^-}\frac{9-x^2+0}{x-3+0}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}-(x+3)=-6$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 3x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 3x}{\sqrt{2}|\sin x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 3x}{-\sqrt{2}\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 3x}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 3=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|3f(x)-1|\le 2-2\cos x \Rightarrow 2\cos x-2\le 3f(x)-1\le 2-2\cos x \Rightarrow \frac{2\cos x-1}{3}\le f(x)\le\frac{3-2\cos x}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-1}{3}=\dfrac{1}{3}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-2\cos x}{3}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}}\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{3}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\times\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{4\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-1-\sqrt{2x-2}}{x-3}\times\frac{x-1+\sqrt{2x-2}}{x-1+\sqrt{2x-2}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1-2x+2}{(x-3)(x-1+\sqrt{2x-2})}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{(x-3)\times 4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{4(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{4}=\frac{1}{2}$$

۹- گزینه ۱ پاسخ است.

از رابطه‌ی $\text{Sin}\,۳x=۳\text{Sin}\,x-۴\text{Sin}^۳x$ داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,x+۳\text{Sin}\,x-۴\text{Sin}^۳x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\text{Sin}\,x}{۴\text{Sin}\,x-۴\text{Sin}^۳x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\text{Sin}\,x}{۴\text{Sin}\,x(۱-\text{Sin}^۲x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\text{Sin}\,x}{۴\text{Sin}\,x(۱-\text{Sin}\,x)(۱+\text{Sin}\,x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۴\text{Sin}\,x(۱+\text{Sin}\,x)}=\frac{۱}{۴\times ۲}=\frac{۱}{۸}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$x\to ۰^-\ \Rightarrow\ \begin{cases}x^۲>۰\\ x^۴>۰\end{cases}$$

اعداد بین صفر تا ۱ هر چه به توان بزرگ‌تری برسند کوچک‌تر می‌شوند. داریم:

$$\begin{cases}x^۲-x^۴=t\\ x\to ۰^-\ \Rightarrow\ x^۲-x^۴\to ۰^+\ \Rightarrow\ t\to ۰^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x^۲-x^۴)=\lim_{t\to ۰^+}f(t)=\lim_{t\to ۰^+}\sqrt{۱-t^۲}=۱$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\tan\pi x}{x^۲-\sqrt{x}}-\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Cos}\frac{\pi x}{۲}}{x^۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\tan(\pi x-\pi)}{x^۲-\sqrt{x}}\times\frac{x^۲+\sqrt{x}}{x^۲+\sqrt{x}}-\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}x)}{x^۲-\sqrt{x}}\times\frac{x^۲+\sqrt{x}}{x^۲+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\tan(\pi(x-۱))\times ۲}{x^۴-x}-\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Sin}(-\frac{\pi}{۲}(x-۱))\times ۲}{x^۴-x}=۲\lim_{x\to ۱}\frac{\tan(\pi(x-۱))}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)}-۲\lim_{x\to ۱}\frac{\text{Sin}[-\frac{\pi}{۲}(x-۱)]}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$=۲\times\frac{\pi}{۳}-۲\times\frac{-\frac{\pi}{۲}}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}=\pi$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases}\text{Cos}^{-۱}x=\alpha\ \Rightarrow\ \text{Cos}\,\alpha=x\\ x\to(-۱)^+\ \Rightarrow\ \alpha\to\pi^-\end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\pi-\text{Cos}^{-۱}x}{\sqrt{x+۱}}=\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\pi-\alpha}{\sqrt{\text{Cos}\,\alpha+۱}}=\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\pi-\alpha}{\sqrt{۲\text{Cos}^۲\frac{\alpha}{۲}}}=\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\pi-\alpha}{\sqrt{۲\text{Sin}^۲(\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۲})}}=\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\pi-\alpha}{\sqrt{۲}\left|\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۲})\right|}$$

$$=\lim_{\alpha\to\pi^-}\frac{\pi-\alpha}{\sqrt{۲}\,\text{Sin}[\frac{۱}{۲}(\pi-\alpha)]}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

وقتی x به عدد ۱ میل می‌کند صورت کسر صفر می‌شود، بنابراین عدد ۱ باید ریشه‌ی مخرج کسر نیز باشد در غیر این صورت جواب حد صفر خواهد شد. داریم:

$$a(۱^۲)+۲(۱)+b=۰\ \Rightarrow\ a+۲+b=۰\ \Rightarrow\ b=-a-۲$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{ax^۲+۲x-a-۲}=۲\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{a(x-۱)(x+۱)+۲(x-۱)}=۲\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(a(x+۱)+۲)}=۲\ \Rightarrow\ \frac{-۱}{۲a+۲}=۲$$

$$\Rightarrow\ ۲a+۲=-\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ a=-\frac{۵}{۴}\ \Rightarrow\ b=-\frac{۳}{۴}\ \Rightarrow\ a-b=-\frac{۱}{۲}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\text{Cos}\,۳\pi x}{x^۲-۲x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲\text{Cos}^۲\frac{۳\pi x}{۲}}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲\text{Sin}^۲(\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۳\pi x}{۲})}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to ۱}۲\left(\frac{\text{Sin}[-\frac{۳\pi}{۲}(x-۱)]}{x-۱}\right)^۲=۲(-\frac{۳\pi}{۲})^۲=۲\times\frac{۹\pi^۲}{۴}=\frac{۹\pi^۲}{۲}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(f(-x-2)\right)=f\left(f\left((-2)^+\right)\right)=f(2^+)=2$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a[1^-]+[2^-]=0+1=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a[1^+]+[2^+]=a+2\end{array}\right\}1=(a+2)-2\Rightarrow\ a=1$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}x\to 1^+\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\\ x\to(-\frac{1}{3})^-\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)+\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^-} f(x)=2$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]=2\times[(\frac{1}{2})^+]=2\times 0=0$$

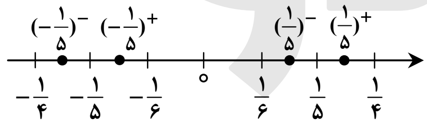
۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$x\to(-\frac{1}{5})^+\Rightarrow x>-\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{1}{x}<-5\Rightarrow \frac{1}{x}\to(-5)^-$$

$$x\to(\frac{1}{5})^+\Rightarrow x>\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{1}{x}<5\Rightarrow \frac{1}{x}\to(5)^-$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]-\lim_{x\to(\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]=[(-5)^-]-[5^-]=-6-4=-10$$

بیان دیگر: با توجه به علامت‌ها:



مثلاً: $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{5})^+}[\frac{1}{x}]=[(-5)^-]=-6$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

تابع $[1-x]$ در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است، بنابراین تابع $y=(x-x^3)[1-x]$ در نقاطی دارای حد است که $x-x^3$ برابر صفر باشد. داریم:

$$x-x^3=0\Rightarrow x(1-x^2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\\x=-1\end{cases}$$

بنابراین تابع موردنظر در ۳ نقطه به طول‌های صحیح دارای حد است.

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{[-\tan^2 x]+\cos 4x}{\sin^2\frac{x}{2}+[\sin^2 x]}=\lim_{x\to 0}\frac{[0^-]+\cos 4x}{\sin^2\frac{x}{2}+[0^+]}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{(2x)^2}\times\frac{(\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\times 16=-2\times1\times1\times16=-32$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6+2x-3}{x^5+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1+2x-2}{x^5-1+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1+2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1+1)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}\times 2\sqrt{2}}+\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times 0+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}x-\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}}{2x\operatorname{Sin}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}x(1-\frac{1}{\operatorname{Cos}x})}{2x\operatorname{Sin}^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{Cos}x-1}{\operatorname{Cos}x}}{2x\operatorname{Sin}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{Sin}^2\frac{x}{2}}{2x\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}\frac{x}{2}}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}\frac{x}{2}}{\operatorname{Sin}x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{Cos}x}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{4}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to(\frac{1}{4})^+}\frac{|\operatorname{Cos}2\pi x|}{1-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to(\frac{1}{4})^+}\frac{-\operatorname{Cos}2\pi x}{1-2\sqrt{x}}\times\frac{1+2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}=\lim_{x\to(\frac{1}{4})^+}\frac{-2\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}-2\pi x)}{1-4x}=-2\lim_{x\to(\frac{1}{4})^+}\frac{\operatorname{Sin}[\frac{\pi}{2}(1-4x)]}{1-4x}=-2\times\frac{\pi}{2}=-\pi$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}2x-\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}3x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Cos}2x-\frac{1}{2}[\operatorname{Cos}4x+\operatorname{Cos}2x]}{\sqrt{1-x^2}-1}\times\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[\operatorname{Cos}2x-\operatorname{Cos}4x]\times 2}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{Sin}(-x)\operatorname{Sin}3x}{-x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sin}3x}{x}=-2\times 1\times 3=-6$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)^2\times[-(\sqrt[3]{x}-1)^2]}{(x-1)^4}=-\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)^2\times(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^4}\times\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\times(x-1)^2}{(x-1)^4\times 4\times 9}=-\frac{1}{36}$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{Sin}\frac{2}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{\operatorname{Sin}(x-1)}$$

= صفر × تابع کراندار + $2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\operatorname{Sin}(x-1)}=0+2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\times 2}{\operatorname{Sin}(x-1)}=2\times 2=4$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

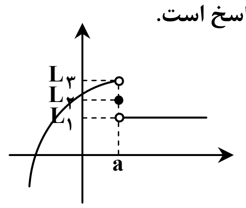
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}f(x)&=\lim_{x\to 2^+}\frac{ax}{2}-b[2x]=a-b[4^+]=a-4b\\ \lim_{x\to 2^-}f(x)&=\lim_{x\to 2^-}\frac{ax}{2}-b[2x]=a-b[4^-]=a-3b\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(2)=-1\Rightarrow\begin{cases}a-4b=-1\\ a-3b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=[1]+[0]=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=[1^+]+[0^+]=1+0=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=[1^-]+[0^-]=0+(-1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط از راست پیوسته است.

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

در نمودار  داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_3 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1 \\ f(a)=L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ مقادیر حد چپ و راست و مقدار تابع در نقطه‌ی $x=a$ نابرابرند، بنابراین تابع در $x=a$ ناپیوسته است.

لازم به ذکر است گزینه‌های (۱) و (۲) پیوسته‌اند زیرا در دامنه‌شان پیوسته‌اند.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,2x}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}\,2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{\sqrt{2\mathrm{Sin}^2 x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{\sqrt{2}\,|\mathrm{Sin}\,x|}$$

$$\left.\begin{array}{l} =\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{-\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,x}=\dfrac{2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=-2 \\ f(0)=a-[0]=a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} b+[x+1]=b+[1^+]=b+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-5$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ است.

تابع $y=[x]$ در نقاطی که $x\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است. ضمناً جمع دو تابع ناپیوسته، ممکن است پیوسته یا ناپیوسته باشد لذا لازم است در نقاط ناپیوستگی، پیوستگی یا ناپیوستگی جمع دو تابع را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=[1^+]-[(-1)^-]=1-(-2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=[1^-]-[(-1)^+]=0-(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=[2^+]-[(-2)^-]=2-(-3)=5 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=[2^-]-[(-2)^+]=1-(-2)=3 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=4$ ناپیوسته است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 9^+} f(x)=[3^+]-[(-3)^-]=3-(-4)=7 \\ \lim\limits_{x\to 9^-} f(x)=[3^-]-[(-3)^+]=2-(-3)=5 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=9$ ناپیوسته است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=[\sqrt{2}^+]-[(-\sqrt{2})^-]=1-(-2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=[\sqrt{2}^-]-[(-\sqrt{2})^+]=1-(-2)=3 \end{cases} \Rightarrow$$ $f(x)$ در $x=2$ پیوسته است.

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

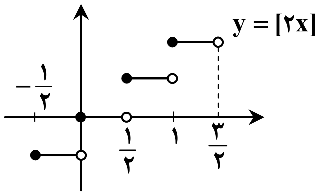
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0 \;\Rightarrow\;$$ $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است.

از آن‌جایی که $[x-1]$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ ناپیوسته است، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ آن است که تابع $g(x)=2x^2-ax-b$ در این دو نقطه برابر صفر باشد.

$$\begin{cases} g(2)=8-2a-b=0 \\ g(3)=18-3a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=8 \\ 3a+b=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=-12 \end{cases} \Rightarrow a+b=-2$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

از بین توابع داده شده توابع الف و ب و ج در دامنه‌شان پیوسته‌اند، پس توابعی پیوسته محسوب می‌شوند و فقط تابع $f(x)=[2x]$ ناپیوسته است.



۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos^3 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sqrt{(1-\cos 2x)(1+\cos^2 2x+\cos 2x)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 2x+\cos 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2\sin^2 x}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}\,|\sin x|}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan 2x}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\times 2=\frac{-\sqrt{6}}{3}$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$x\to\frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \cos x\to 0^- \Rightarrow \cos x<0 \Rightarrow -\cos x>0 \Rightarrow 1-\cos x>1 \Rightarrow 1-\cos x\to 1^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(1-\cos x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-2$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{2x-1}{x-1}=3 \Rightarrow 2x-1=3x-3 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 2} f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{5}{12}$$

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$x\to(-1)^- \Rightarrow x<-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}>-1 \Rightarrow \frac{2}{x}>-2 \Rightarrow \frac{2}{x}\to(-2)^+ \\ -x>1 \Rightarrow -x\to 1^+ \end{cases}$$

$$x\to(-1)^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}<-1 \Rightarrow \frac{2}{x}<-2 \Rightarrow \frac{2}{x}\to(-2)^- \\ -x<1 \Rightarrow -x\to 1^- \end{cases}$$

حد چپ $=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=2a[(-2)^+]+(a-1)[1^+]=2a(-2)+(a-1)(1)=-4a+a-1=-3a-1$

حد راست $=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=2a[(-2)^-]+(a-1)[1^-]=2a(-3)+(a-1)(0)=-6a$

شرط وجود حد برابری حدهای چپ و راست در نقطه است. بنابراین خواهیم داشت:

$$-3a-1=-6a \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|\sin\pi x|}{x^2-x[x]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sin\pi x}{x^2-x[1^+]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sin\pi x}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sin(\pi-\pi x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\sin\pi(1-x)}{-x(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi(1-x)}{1-x}=1\times\pi=\pi$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ است.

از رابطه‌ی $۱-\mathrm{Sin}\,۲x=(\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x)^{۲}$ داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\mathrm{Sin}\,۲x}{(۱-\tan x)^{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x)^{۲}}{(۱-\frac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x})^{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Cos}\,x)^{۲}}{\frac{(\mathrm{Cos}\,x-\mathrm{Sin}\,x)^{۲}}{\mathrm{Cos}^{۲}x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\mathrm{Cos}^{۲}x=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۳^-}g(x)=\lim\limits_{x\to۳^-}[f(x)]-۲=[۱^-]-۲=۰-۲=-۲\\ \lim\limits_{x\to۳^+}g(x)=\lim\limits_{x\to۳^+}-[f(x)]=-[۲^+]=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to۳}g(x)=-۲$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$x\to۴^+\Rightarrow x>۴\Rightarrow ۲x>۸\Rightarrow ۲x-۷>۱\Rightarrow\frac{۱}{۲x-۷}<۱\Rightarrow\frac{۱}{۲x-۷}\to۱^-\Rightarrow\lim_{x\to۴^+}f(\frac{۱}{۲x-۷})=\lim_{x\to۱^-}f(x)=۲$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۳]{۱+۲x}-۱}{\mathrm{Sin}۲x}\times\frac{\sqrt[۳]{(۱+۲x)^{۲}}+\sqrt[۳]{۱+۲x}+۱}{\sqrt[۳]{(۱+۲x)^{۲}}+\sqrt[۳]{۱+۲x}+۱}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱+۲x)-۱}{\mathrm{Sin}۲x\times۳}=\frac{۲}{۳}\lim_{x\to۰}\frac{x}{\mathrm{Sin}۲x}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to-۳}\frac{(a-۱)(x+۳)}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲\Rightarrow(a-۱)\lim_{x\to-۳}\frac{x+۳}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}\times\frac{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$$

$$\Rightarrow(a-۱)\lim_{x\to-۳}\frac{(x+۳)\times۲}{-۵x-۱۵}=۲\Rightarrow(a-۱)\lim_{x\to-۳}\frac{(x+۳)\times۲}{-۵(x+۳)}=۲\Rightarrow(a-۱)\times(-\frac{۲}{۵})=۲\Rightarrow a-۱=-۵\Rightarrow a=-۴$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ است.

شرط پیوستگی در $x=۰$ آن است که: $\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=f(۰)$. داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}[۲x]+۳a=[۰^-]+۳a=-۱+۳a\\ \lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{\pi(b+x)}{\tan^{-۱}(x+۱)}=\frac{\pi b}{\tan^{-۱}۱}=\frac{\pi b}{\frac{\pi}{۴}}=۴b\\ f(۰)=۲\end{array}\right\}\Rightarrow-۱+۳a=۴b=۲\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=۱\\ b=\frac{۱}{۲}\end{array}\right.$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ است.

روش اول: باید داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=(۱-a+۳)[۲^+]=(۴-a)\times۲=۸-۲a\\ \lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=(۱-a+۳)[۲^-]=(۴-a)\times۱=۴-a\\ f(۱)=(۱-a+۳)[۲]=۸-۲a\end{array}\right\}\Rightarrow۸-۲a=۴-a\Rightarrow a=۴$$

روش دوم: تابع $g(x)=[۲x]$ در $x=۱$ ناپیوسته و تابع $h(x)=x^{۲}-ax+۳$ پیوسته است، بنابراین تـابع $f(x)=h(x)g(x)$ زمـانی در $x=۱$ پیوسته است که داشته باشیم:

$$h(۱)=۰\Rightarrow۱-a+۳=۰\Rightarrow a=۴$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ است.

شرط پیوستگی در $x=۱$ آن است که: $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=f(۱)$ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۱}(x^{۳}-۱)\cot(x^{۲}-۱)=\lim_{x\to۱}\frac{x^{۳}-۱}{\tan(x^{۲}-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}{\tan[(x-۱)(x+۱)]}=\lim_{x\to۱}\frac{۳(x-۱)}{\tan(۲(x-۱))}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۱)=\frac{۳}{۲}$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ است.

تابع $f(x)=[2x-3]=[2x]-3$ در نقاطی ناپیوسته است که $2x$ عددی صحیح باشد داریم:

$$-1\le x\le 2 \Rightarrow -2\le 2x\le 4$$

$$2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}2x=-2\Rightarrow x=-1\\ 2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\\ 2x=0\Rightarrow x=0\\ 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ 2x=2\Rightarrow x=1\\ 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}\\ 2x=4\Rightarrow x=2\end{cases}$$

از آن‌جایی‌که $x=-1$ ابتدای بازه است داریم: $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=[(-2)^+]-3=-2-3=-5=f(-1)$

بنابراین تابع در $x=-1$ پیوسته است در نتیجه تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-1,2]$، ۶ نقطه‌ی ناپیوستگی دارد.